F. S. T de Tanger
Département de Physique

Année 2009 / 2010

Mécanique du Point : P112
Contrôle Continu n° 2

Exercice n°1 :

Soit deux billes A et B de masses respectivement m_1 et m_2 placées sur l'axe Ox. On suspend à un point F fixe, la bille B par un fil, pour avoir un pendule simple. La bille A est projetée avec une vitesse constante $\overrightarrow{V_1}$ vers B, qui est immobile au point O. (*fig. n°1*)

a) Le choc étant élastique, trouver (*en utilisant les équations de conservation de* $\overrightarrow{P}$ *et de* E_C) les vitesses $\overrightarrow{V_1'}$ et $\overrightarrow{V_2'}$ des billes A et B après le choc.

b) Après le choc la bille B, entamant un mouvement sinusoïdal, se déplace dans le plan Oxy. Soit $M(x_M, y_M)$ le point où l'amplitude angulaire est maximale. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, trouvez la valeur de y_M.

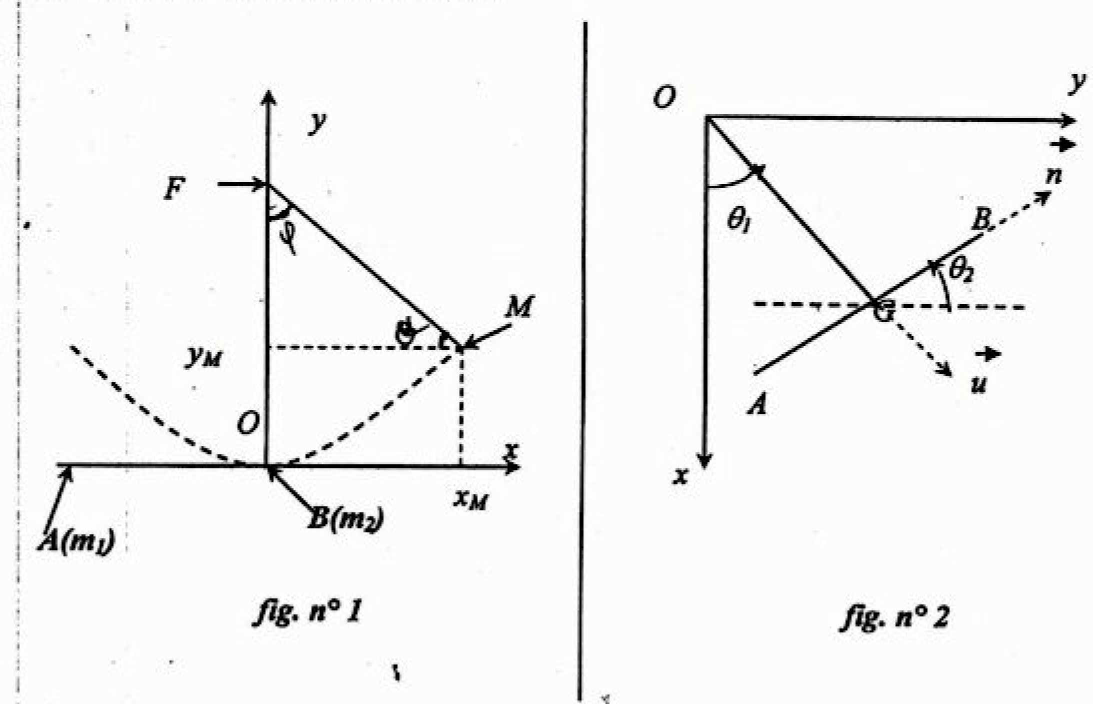


fig. n° 1

fig. n° 2

Exercice n°2 :

Deux billes identiques, assimilables à deux points matériels de masse m, sont fixées aux deux extrémités d'une barre AB de masse négligeable et de longueur l. Cette barre, astreinte à rester dans le plan Oxy *du* référentiel $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, est articulée en G à une tige OG de masse négligeable et de longueur a. Le mouvement est repéré par les angles θ_1 et θ_2. (*fig. n°2*)

a) Exprimer directement dans le référentiel $R^*(G,\vec{u},\vec{n},\vec{k})$ le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_O}(S/R)$ du système S composé des deux billes en fonction de m, a, l, $\frac{d\theta_1}{dt}$ et $\frac{d\theta_2}{dt}$.

b) Calculer directement l'énergie cinétique $E_c(S/R)$ du système en fonction des mêmes données.



Exercice n°3 :

Dans le référentiel terrestre $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ considéré comme galiléen, une tige tourne dans le plan horizontal $(O,\vec{i},\vec{j})$ autour de son extrémité O à la vitesse angulaire constante $\vec{\omega}=\omega\vec{k}$. Sur cette tige, un anneau M de masse m, peut coulisser sans frottement et est soumis à une force de rappel élastique $\vec{F}=-k(r-r_0)\vec{u_r}$ avec $\overrightarrow{OM}=r\vec{u_r}$, l'anneau partant à $t = 0$ de M_0 $(\overrightarrow{OM_0}=r_0\vec{i})$ sans vitesse initiale par rapport à la tige. (*fig. n°3*)
En écrivant la relation fondamentale de la dynamique du point matériel dans le référentiel $R'(O,\vec{u_r},\vec{u_\theta},\vec{k})$ lié à la tige, établir l'équation différentielle du mouvement de l'anneau. Quelle est la nature du mouvement si on a $\frac{k}{m}-\omega^2>0$.

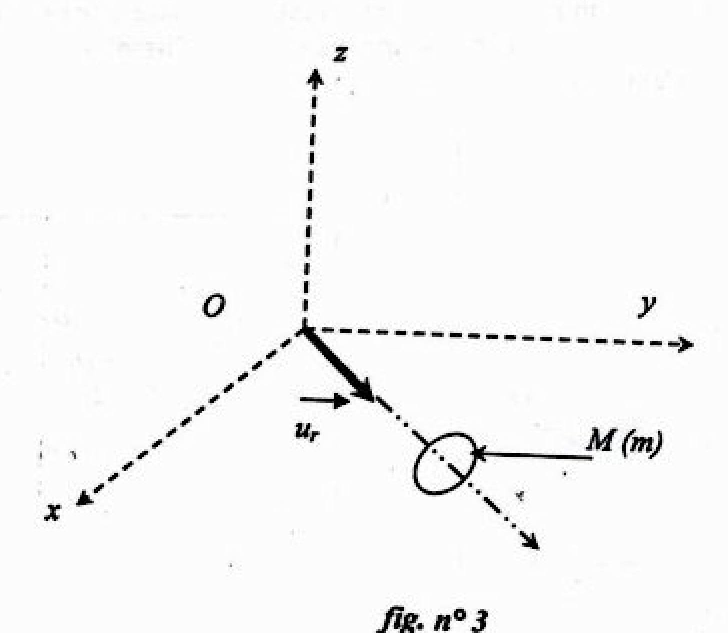


fig. n° 3

Institut la centrale Mecanique du point CC2 09-10

Exercice 1

a/ C.Q.M : $m_1 \vec{V_1} + m_2 \vec{V_2} = m_1 \vec{V_1'} + m_2 \vec{V_2'}$

C.E.C : $\frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2'^2$

$$\begin{cases} m_1 \vec{V_1} = m_1 \vec{V_1'} + m_2 \vec{V_2'} \\ m_1 V_1^2 = m_1 V_1'^2 + m_2 V_2'^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{V_1} + \vec{V_1'} = \vec{V_2'} \\ m_1 \vec{V_1} = m_1 \vec{V_1'} + m_2 \vec{V_2'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V_1'} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{V_1} \\ \vec{V_2'} = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} \vec{V_1} \end{cases}$$

y

F

α

M

y_M

O

x

A(m_1)

B(m_2)

x_M

b/ la bille B, au cours de son mouvement, est soumise à 2 forces la tension du fils $\vec{T}$ et le poids $\vec{P} = m_2 \vec{g}$

$\vec{T}$ est perpendiculaire à la trajectoire d'où $W(\vec{T}) = 0$

$W(\vec{P}) = m_2 g y_M$

D'aprés le theoreme de l'energie cinetique : $\Delta E_C = W(\vec{T}) + W(\vec{P})$

$$\frac{1}{2} m_2 V_2'^2 - 0 = m_2 g y_M \Rightarrow y_M = \frac{V_2'^2}{2g}$$

$$y_M = \frac{4 m_1^2 V_1^2}{2g (m_1 + m_2)^2} = \frac{2 m_1^2 V_1^2}{g (m_1 + m_2)^2}$$

Exercice 2

a/ $\vec{OA} = \vec{OG} + \vec{GA} = a\vec{u} - \frac{\ell}{2}\vec{n}$; $\vec{OB} = \vec{OG} + \vec{GB} = a\vec{u} + \frac{\ell}{2}\vec{n}$

$$\vec{V}(A/R) = a \frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{\ell}{2} \frac{d\vec{n}}{dt} = a \cdot \frac{d\vec{u}}{d\theta_1} \cdot \frac{d\theta_1}{dt} - \frac{\ell}{2} \frac{d\vec{n}}{d\theta_2} \cdot \frac{d\theta_2}{dt} = a\dot{\theta}_1 \vec{n} + \frac{\ell}{2}\dot{\theta}_2 \vec{u}$$

$$\vec{V}(B/R) = a \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{\ell}{2} \frac{d\vec{n}}{dt} = a \cdot \frac{d\vec{u}}{d\theta_1} \cdot \frac{d\theta_1}{dt} + \frac{\ell}{2} \cdot \frac{d\vec{n}}{d\theta_2} \cdot \frac{d\theta_2}{dt} = a\dot{\theta}_1 \vec{n} - \frac{\ell}{2}\dot{\theta}_2 \vec{u}$$

$$\vec{OA} \wedge \vec{V}(A/R) = \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{n} & \vec{k} \\ a & -\frac{\ell}{2} & 0 \\ \frac{\ell}{2}\dot{\theta}_2 & a\dot{\theta}_1 & 0 \end{vmatrix} = \left(a^2 \dot{\theta}_1 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}_2\right)\vec{k}$$

$$\vec{OB} \wedge \vec{V}(B/R) = \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{n} & \vec{k} \\ a & \frac{\ell}{2} & 0 \\ -\frac{\ell}{2}\dot{\theta}_2 & a\dot{\theta}_1 & 0 \end{vmatrix} = \left(a^2 \dot{\theta}_1 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}_2\right)\vec{k}$$

d'où $\vec{\sigma}_O(S/R) = \vec{\sigma}_O(A/R) + \vec{\sigma}_O(B/R) = 2m\left(a^2 \dot{\theta}_1 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}_2\right)\vec{k}$

b/ $E_c(S/R) = E_c(A/R) + E_c(B/R)$

$$= \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m \left(\left(a\dot{\theta}_1 \vec{n} + \frac{\ell}{2}\dot{\theta}_2 \vec{u}\right)^2 + \left(a\dot{\theta}_1 \vec{n} - \frac{\ell}{2}\dot{\theta}_2 \vec{u}\right.\right.$$

$$= \frac{1}{2} m \left(a^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}_2^2 + a^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}_2^2 \right)$$

$$= m\left(a^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}_2^2\right)$$

Exercice 3

R.F.D dans $R^*(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$

$$\vec{F} = m\gamma(M/R^*)$$

$$-k(r-r_0)\vec{u}_r = m\left(\vec{\gamma}(M/R) + \omega^2 \vec{MO}\right)$$

$$-k(r-r_0) = m(\ddot{r} - \omega^2 r)$$

$$-\frac{k}{m} r + \frac{k}{m} r_0 = \ddot{r} - \omega^2 r$$

$$\boxed{\ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) r = \frac{k}{m} r_0}$$

Si $\frac{k}{m} - \omega^2 > 0$ alors posons $K^2 = \frac{k}{m} - \omega^2$ et l'equation sans second membre est $\ddot{r} + K^2 r = 0$

l'equation caracteristique est $x^2 + K^2 = 0$ $\quad x = \pm i K$

$p = 0$, $q = 1$; la solution est de la forme

$$r = \alpha \cos(Kt) + \beta \sin Kt = A \sin(Kt + \varphi)$$

la nature du mouvement est sinusoïdale




ETUSUP.com